Construire un système de numération au cycle 2 : notions et conventions

Thomas de Vittori
Laboratoire de Mathématiques de Lens
ESPE Lille Nord de France

Qu'est-ce qu'une bonne définition? Pour le philosophe, ou pour le savant, c'est une définition qui s'applique à tous les objets définis et ne s'applique qu'à eux; c'est celle qui satisfait aux règles de la logique. Mais dans l'enseignement, ce n'est pas cela; une bonne définition, c'est celle qui est comprise par les élèves.

LES DÉFINITIONS GÉNÉRALES EN MATHÉMATIQUES
Par Henri Poincaré
Conférence faite au Musée pédagogique de Paris (1904)

Construire un système de numération au cycle 2 :

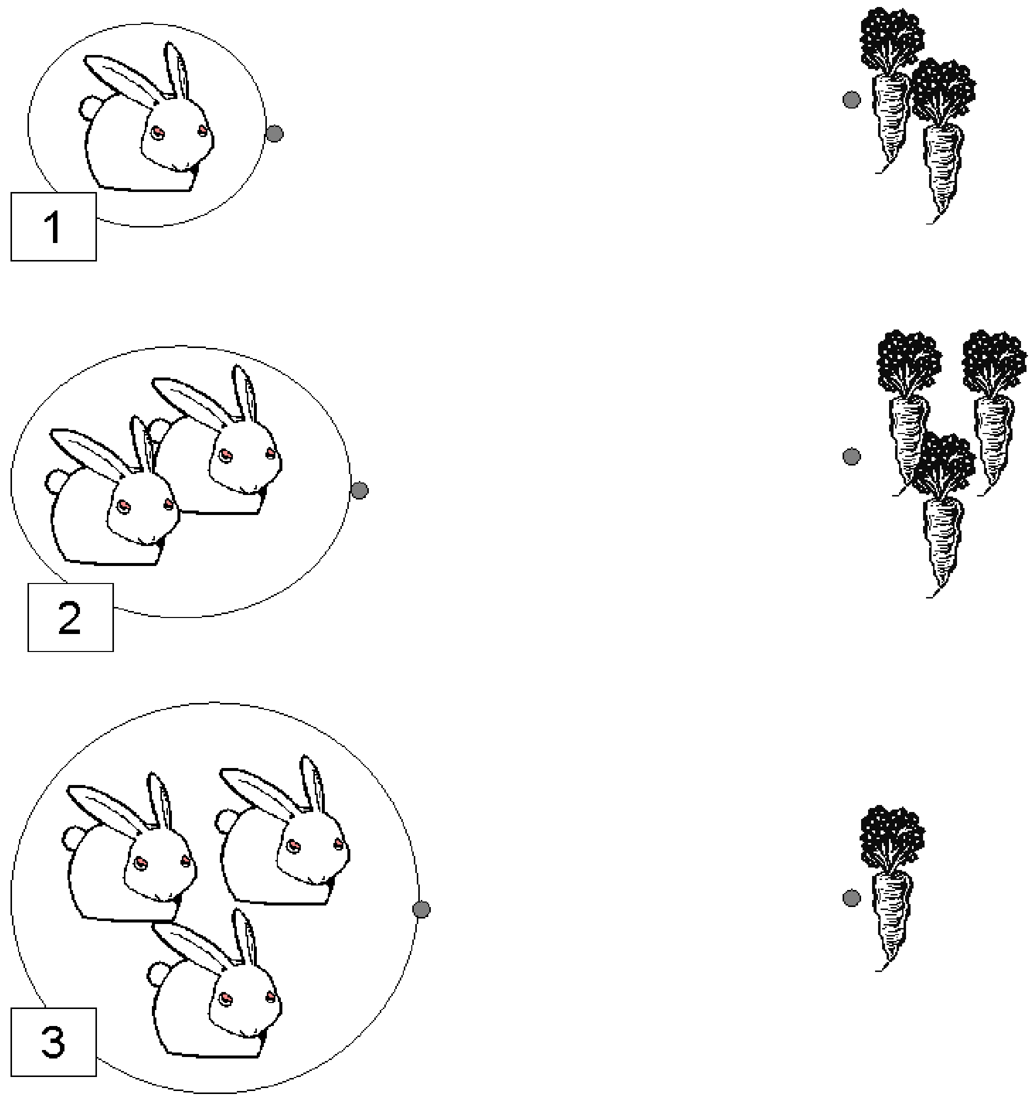
1 - Des lapins, des carottes, des nombres

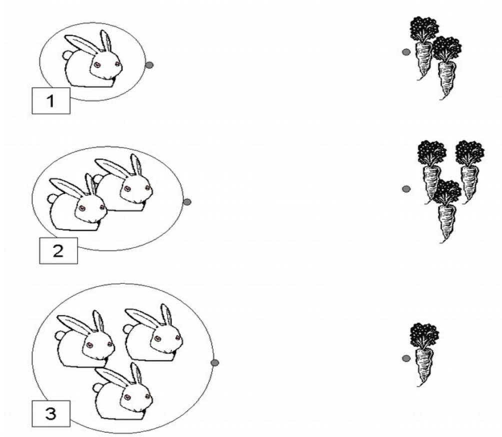
2 - Les shadoks l'avaient bien compris

3 - Y a-t-il du nouveau ?

4 - Des baignoires qui se vident et des trains qui se croisent ...

Des lapins, des carottes, des nombres





→ Un nombre est une abstraction.

Mathématiques : science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif **les propriétés d'êtres abstraits** (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que **les relations qui s'établissent entre eux**. (Dictionnaire Larousse)

« Mais l’important n’est pas vraiment la question des contenus. Je vois deux objectifs majeurs du cours de mathématiques :

• L’objectif numéro 1 est d’apprendre à emboîter des arguments de façon logique.

• L’objectif numéro 2 est de montrer que ce cadre abstrait est extrêmement efficace dans d’autres disciplines : c’est de mettre en œuvre un peu de modélisation.

Ensuite seulement se pose la question des contenus.

Mais ces contenus ne sont pas si importants : l'énorme majorité des élèves oublieront le détail de ce qu'ils ont appris au lycée, et ce n'est pas grave : il n'y a pas un théorème qui soit indispensable dans la vie de tous les jours. »

Cédric Villani (entretien avec l'APMEP, Metz, 2012)

→ Le nombre possède divers aspects (cardinal, ordinal, numéral) qui ont tous leur intérêt et qui sont liés entre eux.

A l'école, ces différents aspects créent plusieurs définitions du nombre dont certaines coïncident avec des constructions mathématiques des entiers.

1) Dedekind et la théorie des ensembles : on construit les entiers comme l'ensemble des cardinaux des collections équipotentes.

{a,b,c} ↔ {x,y,z} ↔ {t,u,v}, ce qui permet de définir un nombre, noté 3.

2) L'arithmétique de Peano : On part de la notion de successeur (càd d'une notion d'ordre) : s
On considère un élément vide
0
s(0) = 1
s(1) = s(s(0)) = 2 ...

La cas du numérotage

<u>Exemples</u> : les maisons dans une rue, les pages d'un livre, le numéro d'un dossard, ...

Les actuels programmes pour l'école maternelle détaillent beaucoup le travail de la dimension cardinale du nombre, mais rappellent que tout est lié :

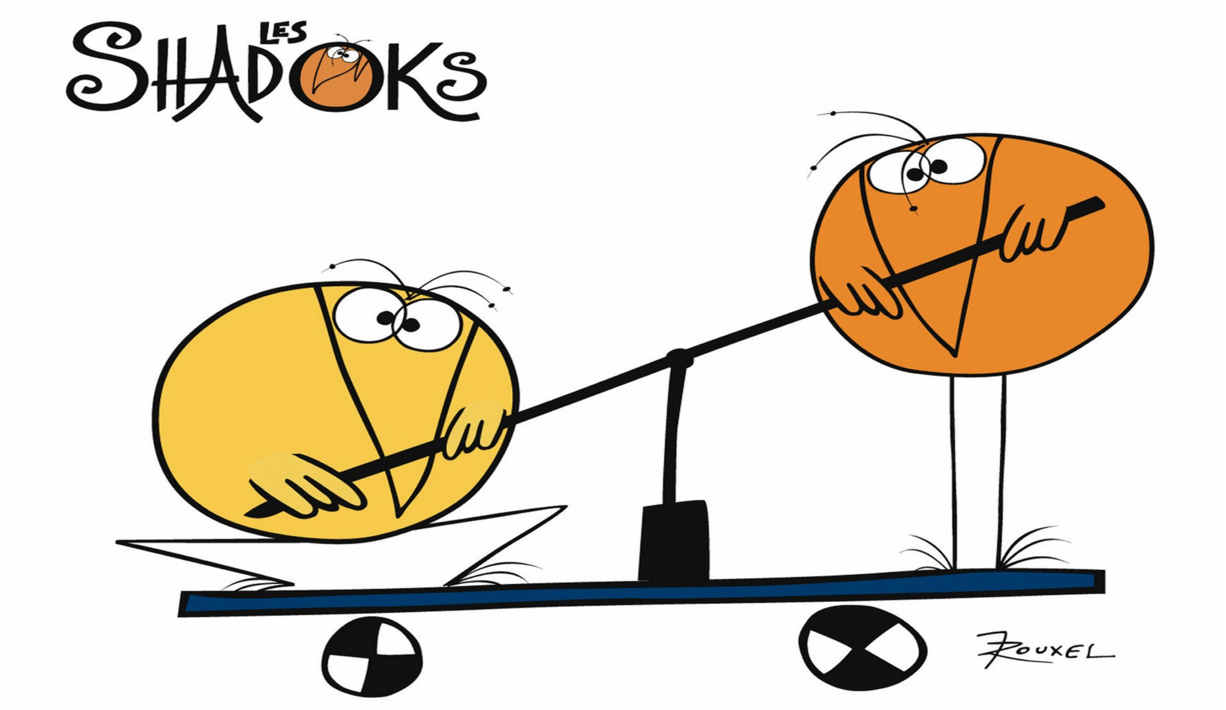
« L’école maternelle doit conduire progressivement chacun à comprendre que les nombres permettent à la fois d’exprimer des quantités (usage cardinal) et d’exprimer un rang ou un positionnement dans une liste (usage ordinal). »

« La construction du nombre s’appuie sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l’acquisition de la suite orale des nombres et l’usage du dénombrement. Chez les jeunes enfants, ces apprentissages se développent en parallèle avant de pouvoir se coordonner »

Rq : Vidéos sur la construction du nombre en maternelle :
http://pedagogie.ac-toulouse.fr/circ-montauban-3/spip.php?article154

Ce qui est absent du cycle 1 : **la notion de système de numération**

2 – Les shadoks l'avaient bien compris.



Les shadoks l'avaient bien compris.

Références :
Si les shadoks m'étaient comptés... Mathilde Lahaye-Hitier (PLOT n°11, 2005)

Du comptage à la numération - Une formation sur l'enseignement de la numération, Bernard ANSELMO et Hélène ZUCCHETTA (Grand N, n°91, 2013)

Numération à l'école primaire. Un scénario de formation. (ARPEME, 2015),

Les shadoks l'avaient bien compris.

Système de numération :

→ Ensemble de règles et de signes permettant d'écrire les nombres

Les shadoks l'avaient bien compris.

<ins>Système de numération</ins> :

→ Ensemble de règles et de signes permettant d'écrire les nombres

→ Chaque civilisation a développé son système de numération

Les shadoks l'avaient bien compris.

Les shadoks l'avaient bien compris.

Système de numération égyptien :

𓏺=1 ; 𓎆=10 ; 𓍢=100 ;
𓆼=1 000 ; 𓂭=10 000 ;
𓆐=100 000 ; 𓁨 =1 000 000

Il s’agit d’un système décimal, additif, sans position et donc sans zéro.

Les shadoks l'avaient bien compris.

Notre système est lui aussi décimal : d'autres traces du passé.

Faisons un peu d'étymologie d'abord hors de France puis dans notre pays.

10 se dit en allemand :

11 se dit en allemand :

12 se dit en allemand :

Les shadoks l'avaient bien compris.

Notre système est lui aussi décimal, mais il y a d'autres traces.

Faisons un peu d'étymologie d'abord hors de France puis dans notre pays.

10 se dit en allemand : **Zehn** de l'ancien allemand **zehan**

11 se dit en allemand : **Elf** de l'ancien allemand **einlif**

12 se dit en allemand : **Zwölf** de l'ancien allemand **zwelif**

Les shadoks l'avaient bien compris.

Notre système est lui aussi décimal, mais il y a d'autres traces.

Faisons un peu d'étymologie d'abord hors de France puis dans notre pays.

10 se dit en allemand : **Zehn** de l'ancien allemand **zehan**

11 se dit en allemand : **Elf** de l'ancien allemand **einlif** **= il reste 1**

12 se dit en allemand : **Zwölf** de l'ancien allemand **zwelif** **= il reste 2**

On retrouve les mêmes racines en anglais dans eleven et twelve

Les shadoks l'avaient bien compris.

En France :

10 se dit : **dix** du latin **decim**

11 se dit : **onze** du latin **undecim** **= 1 et 10**

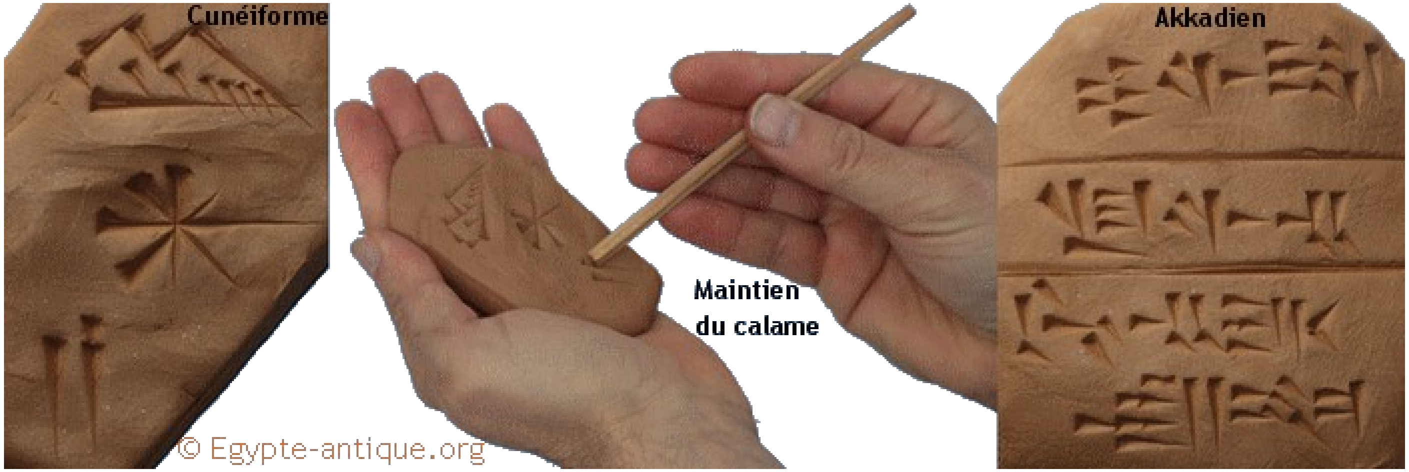
12 se dit : **douze** du latin **duodecim** **= 2 et 10**

Et ainsi de suite, jusqu'à vingt du latin classique **viginti** **= 2 _ 10**

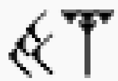
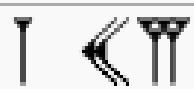
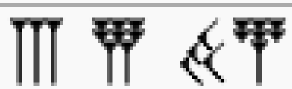
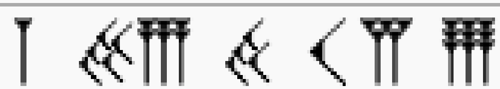
Source : www.cnrtl.fr

D'autres héritages…

Le système babylonien (écriture cunéiforme)



Les shadoks l'avaient bien compris.

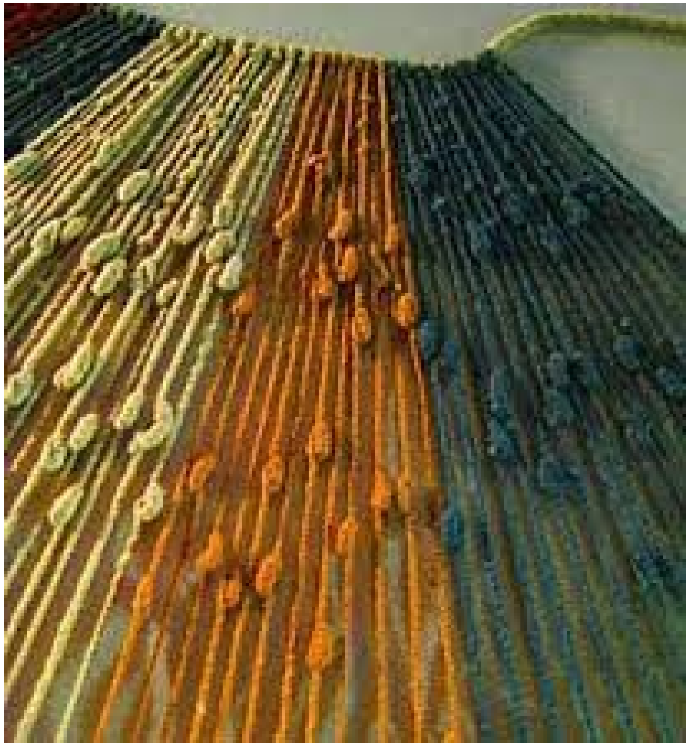
Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1		$1 = 1 \times 1$
17		$17 = 17 \times 1$
44		$44 = 44 \times 1$
60		$60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$
85		$1 \times 60 + 25 \times 1$
3600		$3600 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0 \times 1$
11327		$3 \times 60^2 + 8 \times 60 + 47 \times 1$
7000,2525		$1 \times 60^2 + 56 \times 60 + 40 \times 1 + 15/60 + 3/60^2$

Les shadoks l'avaient bien compris.

Le système babylonien est en **base 60**, dont nous avons hérité pour la **mesure du temps** et des **angles**.

Les shadoks l'avaient bien compris.

D'autres systèmes et le travail avec des élèves.



Les shadoks l'avaient bien compris.

Un exemple de travail en classe de 6^{e}.

Extraits 1, 2, 3 et 6.

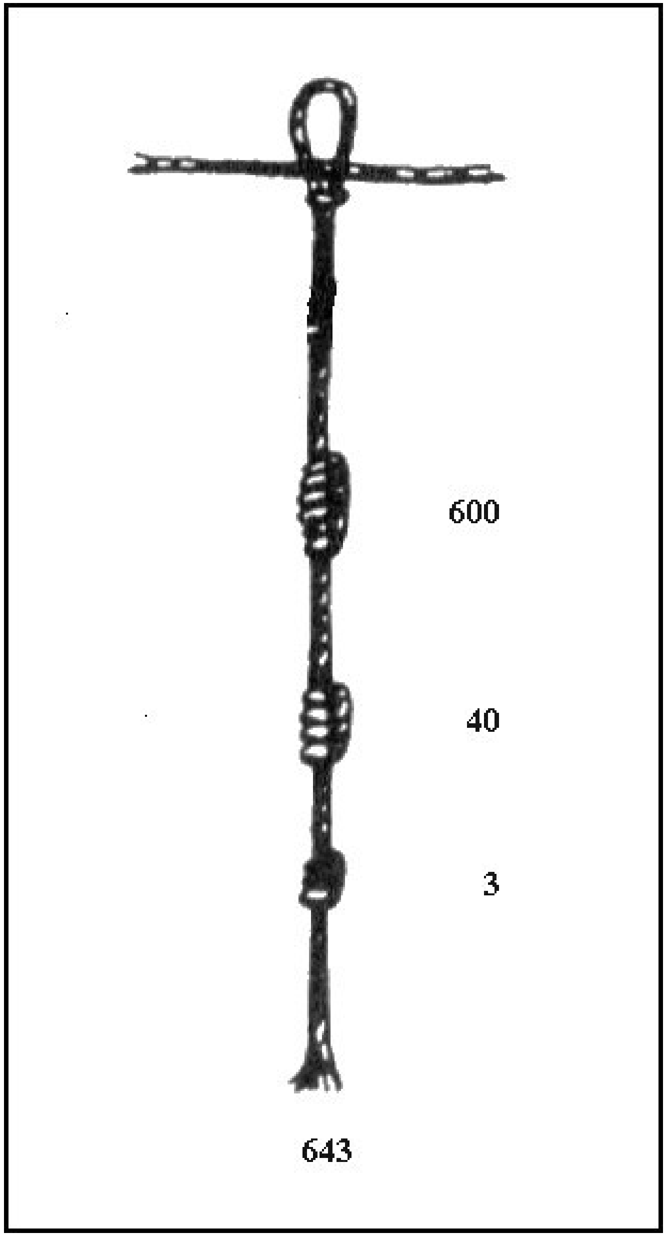
Références :

Programme EDU-HM

→ Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation

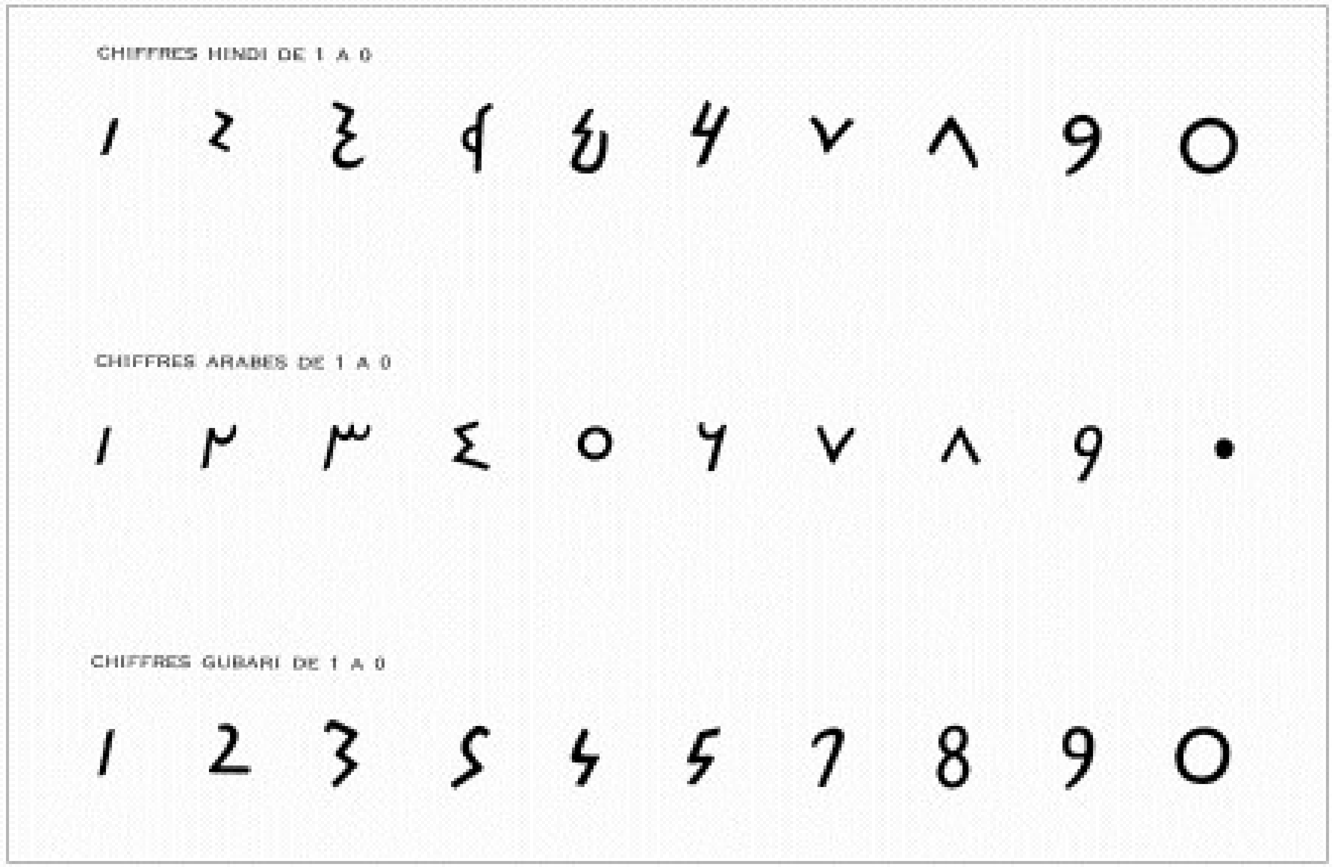
http://eduhm.univ-artois.fr

Login : region-npdc
Pass : region-npdc



Les shadoks l'avaient bien compris.

L'écriture des nombres et la graphie des chiffres :



L'apprentissage de notre système de numération au cycle 2 doit permettre aux élèves de :

- comprendre **les règles du système** (règle d'échange 1 pour 10, position, zéro, sens de lecture)

- apprendre **les conventions** d'écriture des chiffres et l'usage des mots-nombres

Les shadoks l'avaient bien compris.

Pourquoi évoquer cette question de la place du conventionnel dans les mathématiques, en particulier scolaires ?

Pourquoi évoquer cette question de la place du conventionnel dans les mathématiques, en particulier scolaires ?

→ En distinguant ce qui est porteur d'un contenu riche de ce qui n'est qu'un jeu d'écritures ou de mots, il devient possible de <u>choisir une démarche pédagogique adaptée</u>.

→ La communication dans le domaine des mathématiques requièrent un mode d'expression spécifique qu'il convient parfois de juste « <u>transmettre</u> » aux élèves.

La composante écrite de l’activité mathématique devient essentielle. Ces écrits sont d’abord des écritures et représentations produites en situation par les élèves eux-mêmes qui <u>évoluent progressivement avec l’aide du professeur vers des formes conventionnelles</u>.

Nouveaux programmes, p.71

Les shadoks l'avaient bien compris.

Laissons le mot de la fin aux shadoks...

(vidéo)

Les shadoks l'avaient bien compris.

3 - Y a-t-il du nouveau ?

Les textes qui suivent appliquent les rectifications orthographiques proposées par le Conseil supérieur de la langue française, approuvées par l'Académie française et publiées par le Journal officiel de la République française le 6 décembre 1990.

(première page des futurs nouveaux programmes)

II - RÈGLES

1. Trait d'union : on lie par des traits d'union les numéraux formant un nombre complexe, inférieur ou supérieur à cent.

Exemples : elle a vingt-quatre ans, cet ouvrage date de l'année quatre-vingt-neuf, elle a cent-deux ans, cette maison a deux-cents
ans, il lit les pages cent-trente-deux et deux-cent-soixante-et-onze, il possède sept-cent-mille-trois-cent-vingt-et-un francs.

Y a-t-il du nouveau ?

Les élèves consolident leur compréhension des nombres entiers, déjà rencontrés au cycle 1. Ils étudient différentes manières de désigner les nombres, notamment leurs écritures en chiffres, leurs noms à l'oral, les compositions-décompositions fondées sur les propriétés numériques (le double de, la moitié de, etc.), ainsi que les décompositions en unités de numération (unités, dizaines, etc.).

Nouveaux programmes, p.71

Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers

* Utiliser diverses représentations des nombres (écritures en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main, …).

* Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées.

* Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques. » Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres). »

* Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position). »

* Noms des nombres.

- Les connaissances de la numération orale sont approfondies par un travail spécifique à partir des « mots-nombres ».

- Utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56).

- Itérer une suite de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.

Nouveaux programmes, p.74

Quelques commentaires :

- Itérer une suite de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.

La marque des recherches récentes dans les programes :

* Interpréter les noms des nombres à l’aide des unités de numération et des écritures arithmétiques. » Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres). »

→ **les travaux de Christine Chambris et Frédéric Tempier**

C.Chambris et les « unités » de numération

Chambris Christine (2014). Contribution à propos de la numération décimale. Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4. http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf

Chambris Christine (2012). Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs. in Durpaire J.L., Mégard M. Le nombre au cycle 3. pp.13-30. SCEREN-CNDP http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/67/4/NombreCycle3_web_V2_226674.pdf

[…] les mots et expressions unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers... sont très largement utilisés. Ils désignent des unités de compte. On les appellera **unités de numération**.

De même qu'on a compté 1, 2, 3, 4, 5 unités, on compte 1, 2, 3, 4, 5 dizaines.

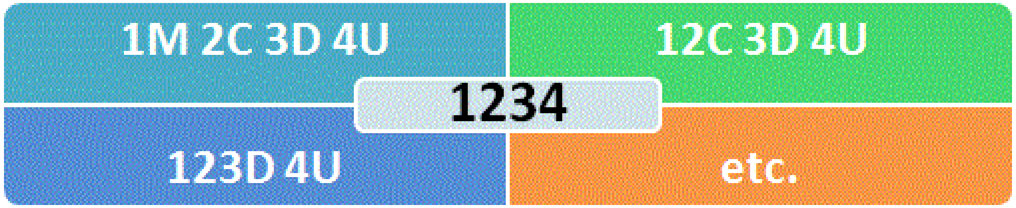
Le nombre au cycle 2

F.Tempier et la dimension décimale du nombre

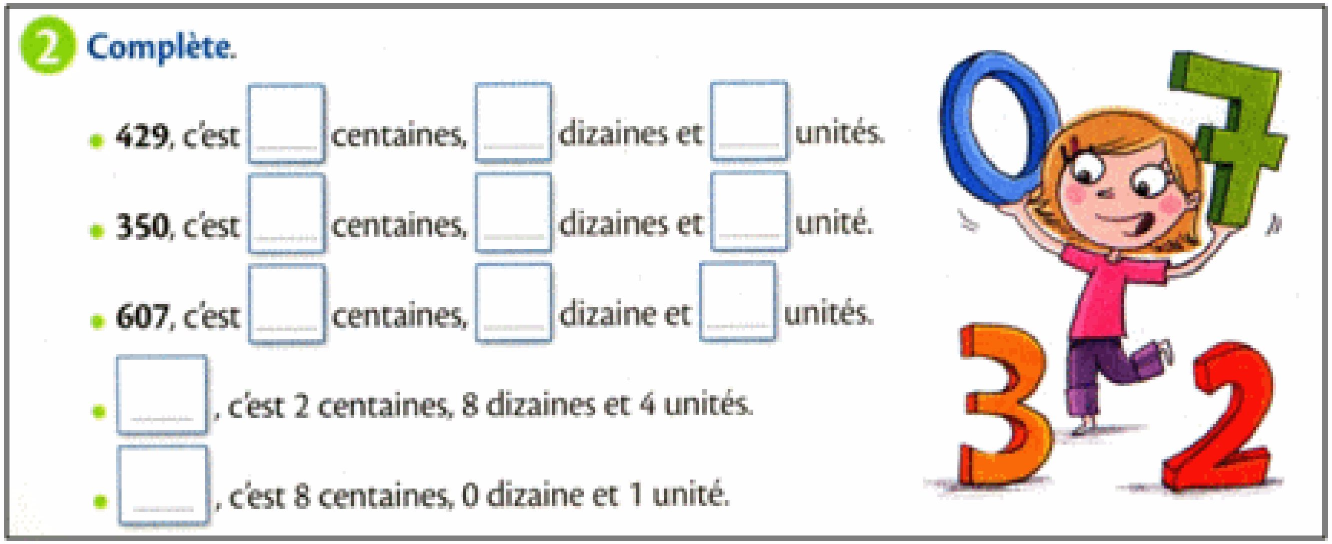
http://numerationdecimale.free.fr/

Les enjeux didactiques selon Tempier :

« Les enjeux principaux de cette progression sont d'amener les élèves à être capables de dénombrer n'importe quelle collection, quelle que soit son organisation ainsi que de savoir décomposer un nombre écrit en chiffres de différentes façons ... »



Y a-t-il du nouveau ?



2 Complète.

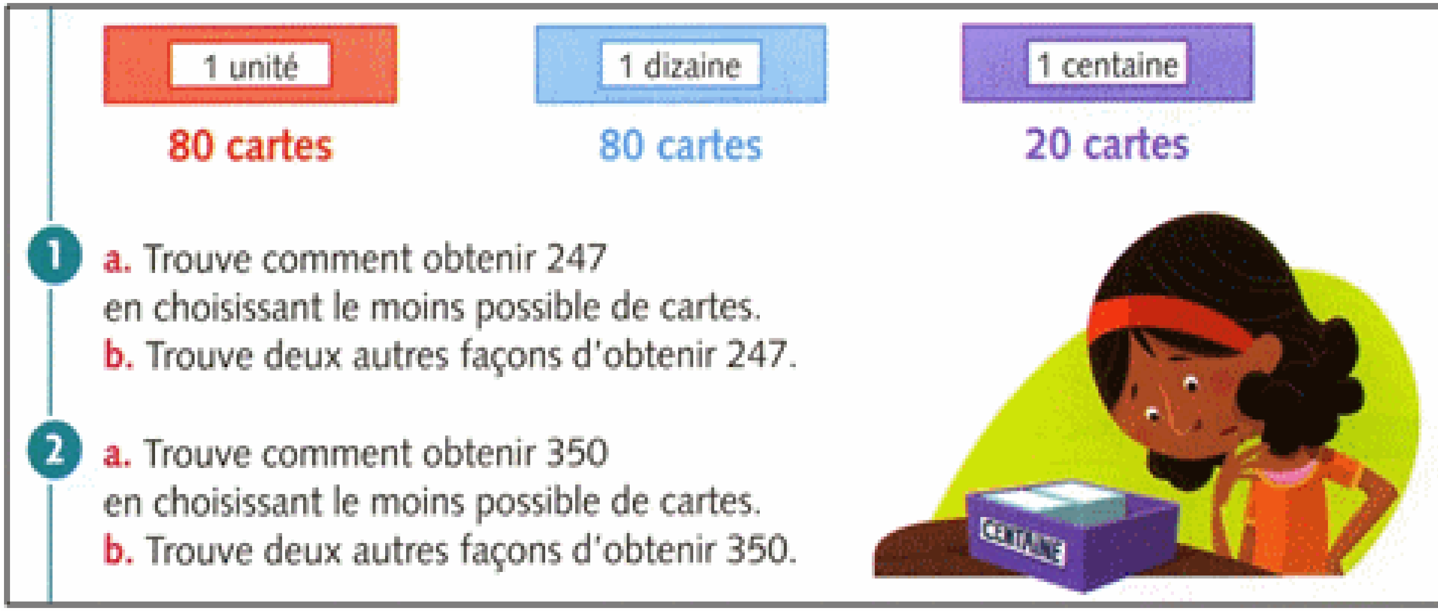
- 429, c'est ☐ centaines, ☐ dizaines et ☐ unités.
- 350, c'est ☐ centaines, ☐ dizaines et ☐ unité.
- 607, c'est ☐ centaines, ☐ dizaine et ☐ unités.
- ☐, c'est 2 centaines, 8 dizaines et 4 unités.
- ☐, c'est 8 centaines, 0 dizaine et 1 unité.

« Dans cet exercice seul l'association entre la position des chiffres et l'unité correspondante est en jeu, c'est à dire l'aspect position de la numération uniquement.

Par exemple pour le premier nombre il faut savoir que dans 429, le 4 représente le chiffre des centaines, etc. »

F.Tempier

Y a-t-il du nouveau ?



1 unité	1 dizaine	1 centaine
80 cartes	80 cartes	20 cartes

1 a. Trouve comment obtenir 247 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 247.

2 a. Trouve comment obtenir 350 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 350.

« Dans cet exercice, pour les questions 1a et 1b, il s'agit du même type d'exercice que dans le manuel précédent. Seul l'aspect position de la numération est en jeu car on peut penser que les élèves vont utiliser la décomposition canonique 247 = 2 centaines + 4 dizaines + 7 unités.

Cependant, dans les questions 1b et 2b, pour obtenir d'autres décompositions, les élèves vont devoir faire 1 centaine en utilisant 10 dizaines comme par exemple : 247 = 1 centaine + 14 dizaines + 7 unités. C'est donc l'aspect décimal de la numération qui est en jeu. »

F.Tempier

Quelques erreurs d'élèves

numerationdecimale.free.fr

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ...85......

b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ...193....

c. 6 centaines + 9 unités = ..69.......

d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..724.....

e. 3 dizaines + 6 centaines = ..36.....

Y a-t-il du nouveau ?

Quelques erreurs d'élèves

numerationdecimale.free.fr

5. Complète

a. 2 dizaines + 15 unités = ..215..

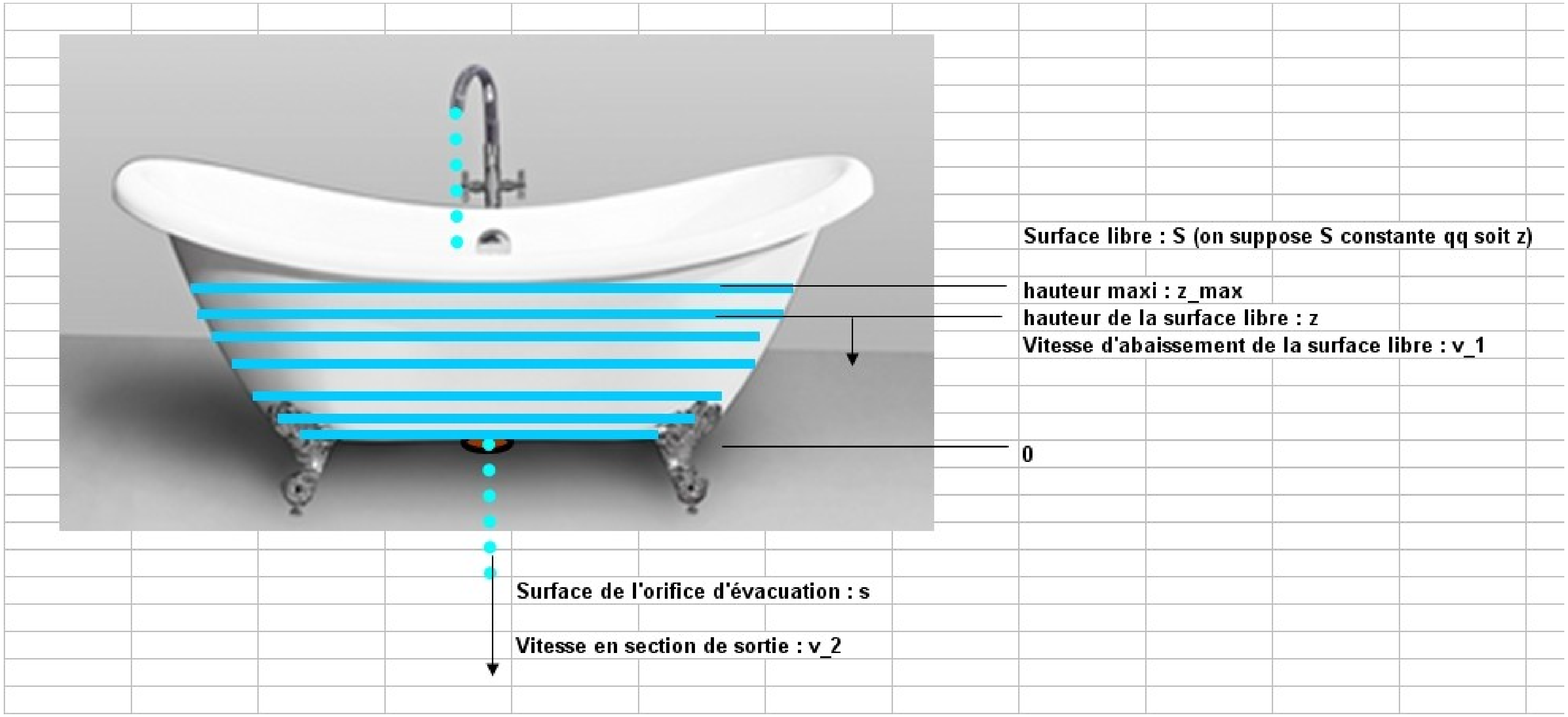
b. 4 centaines + 10 dizaines = ..410...

c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = .5123..

d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = 62114...

Y a-t-il du nouveau ?

4 – Des baignoires qui se vident et des trains qui se croisent...



Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer.

Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements.

Nouveaux programmes, p.71

Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l’activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer.

Les problèmes permettent d’aborder **de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements**.

Nouveaux programmes, p.71

Inventer des problèmes avec les élèves : une activité facile à mettre en œuvre, adaptable à tous les niveaux et riche d'information sur les niveaux d'acquisition des élèves.

(cf vidéo CP-CE1)

Des baignoires qui se vident...

Construire un système de numération au cycle 2 : notions et conventions

Thomas de Vittori
Laboratoire de Mathématiques de Lens
ESPE Lille Nord de France